

Übungen

Abgabetermin: Freitag 11.6. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Produkträume, Unabhängigkeit und Produkte von Zufallsvariablen

Aufgabe 28 (5 Punkte)

$(\Omega_t, \mathfrak{A}_t)_{t \in T}$ sei eine Familie messbarer Räume und $f : \prod_{t \in T} \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann $\bigotimes_{t \in T} \mathfrak{A}_t$ - \mathfrak{B} -messbar ist, wenn es eine abzählbare Teilmenge $I \subset T$ und eine $\bigotimes_{t \in I} \mathfrak{A}_t$ - \mathfrak{B} -messbare Abbildung $g : \prod_{t \in I} \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $f = g \circ p_I$ (d. h. f hängt nur von abzählbar vielen Komponenten ab).

Aufgabe 29 (5 Punkte)

Es seien X, Y und Z Zufallsgrößen. Die Notation “ $X \perp Y$ ” stehe abkürzend für “ X und Y sind stochastisch unabhängig”. Zeigen oder widerlegen Sie:

- $X \perp Y \iff X^2 \perp Y^2$.
- $X \perp Y, X \perp Z \iff X \perp (Y, Z)$.
- $X \perp Y, Y \perp Z \implies X \perp Z$.
- $X \perp (Y, Z), Y \perp Z \iff X, Y$ und Z sind stochastisch unabhängig.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{A}$ ein Mengensystem. \mathfrak{G} heißt *P-trivial*, falls $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathfrak{G}$. Zeigen Sie:

- Ein *P-triviales* Mengensystem ist von jeder σ -Algebra $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}$ unabhängig.
- Ein Mengensystem, das von sich selbst stochastisch unabhängig ist, ist *P-trivial*.
- Für zwei Mengensysteme $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \text{ sind stochastisch unabhängig} \iff \mathfrak{G}_1 \text{ ist } P\text{-trivial.}$$

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Es seien X, Y und Z drei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen, die die Länge, Breite bzw. Höhe eines Quaders beschreiben.

- Bestimmen Sie eine λ -Dichte für den Flächeninhalt einer Seitenfläche des Quaders.
- Bestimmen Sie eine λ -Dichte für das Volumen des Quaders.